MARIO RUFFINI

A Berardo

$\sqrt[12]{2}$

Radice dodicesima di due, ovvero l'idea di Dio

Da Pitagora a Schönberg.
Riflessioni sul temperamento equabile
e sulle implicazioni teologiche connesse

Musica e Arti figurative trovano nella matematica il loro punto primario d'incontro: la grande stagione matematica della musica, da Pitagora a Boezio, fino a al temperamento equabile e poi fino alle conseguenze dodecafoniche del Novecento, trovano un equivalente dentro la grande stagione matematica nell'arte figurativa, dalla sezione aurea alla prospettiva, da Piero della Francesca al razionalismo del Bauhaus, dove altresì tutto diventa progressivamente matematizzabile. Ma rimaniamo, in questa nota, alla sola osservazione matematica della musica.

PITAGORA: IN PRINCIPIO ERA IL VERBO

Musica e matematica hanno felicemente convissuto per millenni fino alla temporanea separazione del periodo romantico. I greci distinguevano la musica teoretica e sacra da quella sensoriale e profana. L'insegnamento pitagorico, che per due millenni ha influenzato la cultura musicale occidentale, può essere riassunto nella coincidenza di "musica, matematica e natura". I numeri coinvolti nelle leggi armoniche erano 1, 2, 3, 4, la cui somma formava il numero magico dei Pitagorici, 10, sulla cui forma sacra del *tetractys* essi giuravano. "Tutto è numero". Tale concetto codifica la fede nella "ragione", che i greci chiamavano *logos,* che significava altresì "parola". Tale coincidenza può portare anche a rileggere l'inizio del "Vangelo secondo Giovanni" come riformulazione del credo pitagorico:

In principio era il Verbo/e il Verbo era presso Dio/e il Verbo era Dio
In principio era la Ragione/la Ragione era Dio/Dio era la Ragione

Il credo pitagorico vedeva quindi nell'ordine armonico del mondo la necessità di un Demiurgo ordinante, non creatore. Così Platone ci tramanda il credo pitagorico attraverso l'esoterico e misterioso *Timeo*. Per arrivare alla scala musicale, si considerano i numeri che corrispondono a uguaglianza (1), disuguaglianza (2), mescolanza (1+2=3), i loro quadrati (4, 9) e i loro cubi (8, 27). Ricordando che l'ottava è in rapporto di 2 : 1, la quinta di 3 : 2, e che moltiplicando per 3/2 si sale di una quinta, mentre moltiplicando per 2/3 si scende di una quinta, avremo la possibilità di far salire o scendere ogni nota di un'ottava, moltiplicando o dividendo per 2. Tale esercizio conduce alla scala pitagorica, dove il rapporto fra due note che distano un tono (Do-Re, Re-Mi, Fa-Sol, Sol-La, La-Si) è 9/8, quello fra note che distano un semitono (Mi-Fa, Si-Do) è 256/243.

Ma la teoria di Pitagora è falsa perché salendo di un tono e scendendo di due semitoni non si torna al punto di partenza, ma si ottiene il cosiddetto comma pitagorico, pari approssimativamente a un quarto di semitono (o di un ottavo di tono) temperato. Ovvero, salendo di 12 quinte e scendendo di 7 ottave non si torna al punto di partenza (come oggi accade con la scala temperata). Ciò sta a significare che la scala pitagorica produce una spirale infinita di quinte.

Se il problema del comma è serio per i moderni che usano le note alterate, non lo era per i greci che non le usavano: la loro armonia si riduceva ai soli intervalli di ottava, quinta e quarta, gli stessi rapporti che sembrano regolare l'architettura del Partenone e più in generale della Sezione aurea (l'unica civiltà, la loro, che non conobbe lo zero). La scala pitagorica con diesis e bemolli richiede dunque 21 note, così disposte, deve le varie coppie differiscono di un comma:

Reb-Do# Mib-Re# Solb-Fa# Lab-Sol# Sib-La#
Do-Si# Re Fab-Mi Fa-Mi# Sol La Dob-Si

Lo sdoppiamento dei cinque tasti neri e dei quattro bianchi che distano di semitono venne effettivamente adottato nelle tastiere cromatiche del cinquecento quali l'archicembalo e l'arciorgano, mentre nel XVI secolo la scala pitagorica venne gradualmente abbandonata in occidente in favore di un nuovo un nuovo sistema che sostituiva la quarta con la terza naturale o pura, in rapporto di 5:4, rapporto scartato da Pitagora a causa di numeri non buoni dal punto di vista mistico e magico. Il nuovo sistema, reso popolare da Gioseffo Zarlino, era incentrato sull'accordo di tre suoni in proporzione 4 : 5 : 6. Ovvero una quinta (6/4 = 3/2) scomposta di terza maggiore (5/4) e terza minore (6/5), il cui esempio paradigmatico è l'accordo maggiore Do-Mi-Sol, da cui si ottiene la nuova scala. I rapporti relativi a Do, Re, Fa, e Sol rimangono immutati rispetto alla scala pitagorica, quelli relativi a Mi, La e Si, che si differiscono invece per una quantità detta comma sintonico. Rispetto alla scala pitagorica, la scala zarliniana permette l'espressione di ulteriori armoniche, ma i rapporti relativi a intervalli fra note consecutive non sono più regolari.

Nella scala pitagorica c'è un tono (9/8) e un semitono (256/243), in quella zarliniana ci sono due toni diversi (9/8 e 10/9) e un semitono (16/15). Diesis e bemolle della scala zarliniana si ottengono, per definizione, sottraendo una terza maggiore da una terza minore. Anche la scala zarliniana richiede 21 note, diversamente disposte:

Do#-Reb Re#-Mib Fa#-solb sol# -Lab La#-Sib
Si#-Do Re Mi-Fab Mi#-Fa sol La Si-Dob

È bello pensare (anche se ciò è solo un caso) che il sistema temperato si componga di 12 suoni, lo stesso numero delle scale pitagorica e zarliniana (21) letto in modo retrogrado[1].

I GESUITI, SCUOLE DI ATEISMO

La sostanziale omofonia della musica greca non poneva problemi di consonanza: la varietà era assicurata dalla gran quantità di modi, ciascuno dei quali era associato a un diverso stato emotivo, complessivamente descritti da Platone nella *Repubblica* (i medesimi e differenti stati emotivi prodotti dall'architettura dorica, ionica, frigia, lidia o misolidia…). Sant'Ambrogio li limitò a quattro (IV sec.), Glareo a sei (XVI sec.); nel XVII sec. rimasero infine in vigore due

[1] Per tutto questo capitolo ("Pitagora: in principio era il Verbo"), cfr. Piergiorgio Odifreddi, *Penna, pennello e bacchetta. Le tre invidie del matematico*, Roma-Bari, Editori Laterza, 2005.

modi, il maggiore e il minore. La drastica riduzione dei modi scaricò sulla tonalità, cioè sulla nota attorno alla quale organizzare la composizione, il compito di assicurare varietà. I greci usavano una tonalità per ciascuno dei sette modi, il canto gregoriano ne usava due per ciascuno dei quattro modi ambrosiani, oggi ne usiamo dodici per ciascuno dei due modi moderni. Le associazioni platoniche fra modo e stato emotivo si ritrovano anche oggi: Mi maggiore è gioioso, Fa maggiore pacifico ecc. La storia della musica non sembra che una progressiva riduzione della modalità e della contemporanea aumentazione tonale.

La tonalità portò alla necessità di risolvere il problema del comma, che, solo, avrebbe permesso la trasposizione delle scale e l'uso della modulazione. Fu introdotto allora il temperamento, che consiste nell'accordare gli strumenti leggermente fuori tono. Sia il temperamento per quinte di Arnaut che quello mesotonico lasciarono il passo al tentativo di Andreas Werckmeister. Il temperamento per quinte di Arnaut scaricava tutta la dissonanza su un'unica quinta, Si-Fa#, chiamata quinta del lupo, tanto era insopportabile, quello mesotonico rendeva "pure" le terze lasciando tutte le quinte stonate. Werckmeister seguì il seguente metodo: se dodici quinte pitagoriche differiscono da sette ottave per un comma pitagorico, basta renderne otto pure, e dividere il comma fra le altre quattro. Egli temperò Do-Sol, Sol-Re, Re-La e Si-Fa#: il ciclo si conclude a commi e la coincidenza fra Si# e Do è assicurata. Le uniche due coppie non coincidenti sono Mi-Fab e Si-Dob. La scala ben temperata produce ancora intervalli disuguali, ovvero quattro tipi diversi di semitoni, ma *Il clavicembalo ben temperato* di Johann Sebastian Bach mostrò che tale sistema era perfettamente soddisfacente dal punto di vista estetico e musicale.

In realtà si affermò una forma ancora più radicale, detta "temperamento equabile", che divide la scala cromatica in dodici semitoni uguali, lasciando solo le ottave perfette. Matematicamente ciò significa considerare un numero che moltiplicato per se stesso 12 volte tenda a 2, cioè $\sqrt[12]{2}$. L'eguaglianza dei semitoni rende possibile l'introduzione di scale artificiali, con successioni diverse fra tono e semitono. La completa equivalenza tra i semitoni del temperamento equabile apre la strada alla tonalità e contemporaneamente al suo dissolvimento: a tale ineluttabile conseguenza porta il sistema nuovo in cui ogni nota ha pari dignità e uguaglianza con tutte le altre. Bach racconta col sistema temperato il mondo tonale, Schoenberg la sua dissoluzione e il nuovo mondo dodecafonico.

GIOSEFFO ZARLINO E I GALILEI

Solo nel 1589 si capì che le leggi pitagoriche erano valide per le lunghezze delle corde ma non per i pesi, grazie a Vincenzo Galilei, padre di Galileo, che evidenziò il fatto nel *Discorso intorno alle opere di Gioseffo Zarlino*. Per aumentare di un'ottava il suono di una corda bisogna infatti dimezzarne la lunghezza o quadruplicarne il peso, e non semplicemente raddoppiarlo, come aveva fatto Pitagora. C'è poi una terza possibilità, oltre quelle di cambiare lunghezza e tensione, cambiare la sezione. Ma anche papà Galilei fece qualche errore nella formulazione, subito corretta questa volta dal figlio Galileo, che nei *Discorsi e formulazioni matematiche* rimedia all'errore paterno enunciando finalmente le corrette leggi dell'armonia, siamo nel 1638:

$$v \approx \frac{1}{l} \approx \frac{1}{A} \approx \sqrt{t}$$

Galileo applicò le leggi dell'armonia al suo giocattolo preferito, il pendolo, e al piacere acustico di ascoltare accordi armonici egli giustapponeva il piacere ottico di vedere pendoli sincronizzati: un pendolo all'ottava tornava in sincrono una volta su due, quello alla quinta uno su tre, quello alla terza uno su cinque: maravigliosi incroci; Keplero rese polifonici i

pianeti che con Pitagora e Platone erano monofonici. Egli studiò gli archi di orbita dei pianeti rivelando incredibili corrispondenze con gli intervalli musicali e con le voci; Newton a sua volta giocava con i prismi: egli nota che un fascio di luce rifratto da un prisma si divide in un fascio di sette colori, e che le frequenze estreme dello spettro stanno nel rapporto 2 : 1.

Fra giochi di pendoli, quelli con prismi e studi sui pianeti, si inserisce la polemica sulla nuova musica fra Gioseffo Zarlino e Vincenzo Galilei. Se essa fu probabilmente la polemica tra due opposte filosofie di modelli matematico-musicali, onto-teologica la prima, formalista la seconda, altrettanto vero il fatto che la "splendida natura" è per Zarlino il fondamento del suo modello matematico di scala musicale. La critica di Galilei a Zarlino ha forse più ragioni pratiche che epistemologiche: egli vede compromessa la prassi musicale dalla distinzione zarliniana fra «naturale» e «artifiziale». In Vincenzo Galilei rivive il mito umanistico dei «maravigliosi effetti della musica antica», musica come prospettiva di ascolto, in Zarlino il mito rinascimentale dell'"armonia", la musica nella prospettiva dell'opera. Alla fede di Zarlino nell'armonia è speculare lo scetticismo di Vincenzo Galilei. Gioseffo crede alla musica come scienza, Vincenzo ritiene invece che la scienza s'affanni inutilmente coi numeri. Per Zarlino il fine della natura è la perfezione dell'opera, per Galilei la musica è comunicazione. Egli dice che natura e arte hanno finalità diverse: gli "stromenti" ideati dall'uomo conseguono infatti un fine diverso dalla natura o che la natura non può conseguire. La natura armonica di Zarlino si contrappone all'arte meccanica dell'uomo.

Tale polemica viene risolta dal figlio di Vincenzo, Galileo, che unifica alfine i princìpi della natura e quelli della meccanica che il padre e Zarlino avevano diviso: per la prima volta la meccanica diventa la scienza fisica e matematica del movimento dei corpi, naturali e artificiali. Con Galileo Galilei (il primo a stabilire con esattezza il rapporto fra altezza e frequenza dei suoni musicali) la musica incontra la scienza: il numero degli antichi incrocia la natura dei moderni e diventa suono.

FRANCESCO MAUROLICO [2]

Maurolico, detto Francesco da Messina (Messina, 1494-1575), era figlio di un medico bizantino rifugiatosi in Sicilia a causa dell'invasione turca. Fu un coltissimo matematico benedettino che si dedicò principalmente all'astronomia, alla meccanica, alla geometria e alla musica. Nacque 23 anni prima di Zarlino e 26 prima di Vincenzo Galilei. Fu egli a raccogliere per primo, dopo mille anni, la grande eredità di Boezio e a riprendere quel testimone prezioso che ci aveva collegato alla Grecia di Pitagora. Mille anni non erano passati invano se ora i calcoli venivano fatti con numeri arabi e non più con quelli romani come al tempo di Boezio. Il suo unico testo musicale a stampa, le *Musicae traditiones carptim collectae* sono costituite dalla "Boetianae musicae epitome", e da una serie di piccoli testi sulla natura dei suoni, sulle note e intervalli musicali, sulla lira a sette corde, sui "praecepta contexendi symphonias", sugli inventori degli strumenti musicali e in ultimo, su uno schema di "calculus vocalium proportionum".

[2] Questo capitolo "Francesco Maurolico" riprende il lemma di Mario Ruffini, *Maurolico, Francesco*, in *Grove - The New Grove Dictionary of Music and Musicians*, 16 (Volume Sexteen), Second Edition edit by Stanley Sadie, Executive Editor John Tyrrell, Macmillan Publishers Limited, 2001, pp. 162-163.

Degli studi di Maurolico su musica e matematica rimane un denso manoscritto alla Biblioteca Nazionale di Parigi: egli si applicò principalmente a calcolare il valore matematico di ogni tipo di intervallo musicale. Comparò la realtà additiva o sottrattiva in musica (regola *compositionis et subtractionis*) con la realtà moltiplicativa e divisiva in matematica: se in

musica quinta più quarta dànno un ottavo (quinta [3/2] [*diapente*] + quarta [4/3] [*diatessaron*] = ottavo [2] [*diapason*]), in matematica la realtà è moltiplicativa, non additiva (3/2 . 4/3 = 2); similmente scoprì che la realtà sottrattiva in musica corrisponde a una realtà divisiva in matematica: ottava meno quinta uguale quarta (ottavo [2] [*diapason*] - quinta [3/2] [*diapente*] = quarta [4/3] [*diatessaron*]), che in matematica si esprime non sottraendo ma dividendo (2 : 3/2 = 4/3). Studiò a fondo l'esacordo di Guido di cui calcolò tutte le realtà matematiche, la Lyra di Mercurio di sette corde, che Pitagora aveva fatto di otto, per trovare la corrispondenza fra corde, pianeti e modi. Trattò le corrispondenze fra i numeri collegati a diapason, diapente, diatessaron e tonus, ovvero 6 . 8 . 9 . 12 per arrivare alla media aritmetica: 6 . 9 . 12 (realtà additiva), quindi alla media geometrica: *sicut* 6 - 8 *sic* 9 - 12 (realtà moltiplicativa), e infine alla media armonica: 6 . 8 . 12, collegando tali medie al cubo (uno dei cinque solidi platonici) e alle sue 6 facce, 8 angoli e 12 spigoli.

Egli tratta con frequenza i problemi della 3ª maggiore e della 3ª minore, mentre rifiuta ogni discussione sull'intervallo di quinta (ciò farebbe supporre qualche contatto, anche indiretto, con l'opera di Gioseffo Zarlino), e arriva all'idea di temperamento equabile anticipando di ottanta anni Marin Marsenne e di centocinquanta anni Andreas Werckmeister, ma non osa avventurarsi nel regno delle radici, poiché queste conducono ai numeri irrazionali che, in quanto numeri infiniti sfiorano [e comprendono] l'idea di Dio.

$\sqrt[12]{2}$, OVVERO L'IDEA DI DIO

Il temperamento equabile offre una soluzione ai problemi posti dal temperamento pitagorico e da quello naturale. Da Pitagora, passando per Boezio e poi per Maurolico, Zarlino e Galilei, nessuno aveva osato dividere l'ottava in 12 parti uguali, poiché per far ciò era necessario l'uso della radice. Il problema non è di ordine matematico (o non solo), come potrebbe apparire a prima vista: siamo di fronte a un grande problema teologico. La radice produce infatti numeri infiniti, e non compete (o non competeva) all'uomo avventurarsi in tale ordine di pensiero: esso sfiora e comprende l'idea di Dio.

Da Pitagora fino al Settecento molti avevano sfiorato e intuito il problema: nessuno aveva osato affrontarlo, poiché era un problema che investiva appunto seri problemi teologici. Nei complessi appunti di Maurilico appare con evidenza e più volte, fra decine di altre, la formula: 9 . $\sqrt{72}$. 8, ma egli non ne fa mai uso, in tutta la pur intensa trattazione. Poteva un monaco benedettino sfidare i numeri infiniti? Di lì a poco sarebbe arrivata l'abiura di Galileo, mentre era ancora forte l'odore acre dei corpi bruciati di Girolamo Savonarola e Giordano Bruno. Non era ancora dato all'uomo poter toccare l'infinito. L'inquisizione vegliava severa.

Non è un caso che al temperamento equabile si giunga nel secolo della ragione: il *cogito ergo sum* di Descartes apre la via al razionalismo di quel periodo. La "Regola di Cartesio" (che è fondata sulle radici) spazzò via i timori del numero infinito che le radici portavano con sé e permise finalmente la teorizzazione della divisione in dodici parti uguali dell'ottava. Che puntuale arriva di lì a poco: Werckmeister la teorizza nel 1691, Bach la pratica con il

Clavicembalo ben temperato (1722 e 1744), nel 1781 esce la *Critica della ragion pura* di Immanuel Kant.

Fu il francese Mersenne a calcolare per primo i valori del temperamento equabile nella sua opera *Harmonie Universelle* (1636), che poi si affermò grazie all'opera di Andreas Werckmeister che li espose e teorizzò nel suo *Musikalische Temperatur*. Qualcuno potrebbe anche parlare di casualità, ma Marin Marsenne fu un contemporaneo di Descartes; ne fu suo

allievo nel collegio gesuita di La Flèche dove si dedicò agli studi di logica fisica metafisica e matematica. Alla Sorbona perfezionò gli studi teologici e entrò nell'ordine dei Frati minori. Fece viaggi in Germania, ebbe stretti contatti con Descartes e Galileo. Su questo *humus* nato in terra francese, Descartes, Marsenne, gesuiti (ancora loro, i gesuiti, l'unica grande scuola di ateismo), poté meglio svilupparsi subito dopo, in ambiente luterano (Werckmeister, Bach), la teorizzazione matematica del temperamento equabile: tutte le condizioni erano ormai favorevoli per arrivare all'uso della radice e all'idea di Dio che essa porta con sé con i suoi numeri infiniti.

Partendo dal rapporto di frequenza dell'ottava (2 : 1), si divide quest'ultima in dodici parti uguali tramite la $\sqrt[12]{2}$, ottenendo così il semitono temperato: 12 quinte equivalgono ora perfettamente a sette ottave. Tale sistema porta con sé la grande novità del semitono che divide esattamente in due il tono, da cui si ottiene l'equivalenza enarmonica di *diesis* e *bemolle* fra gradi contigui: la rivoluzione può avere inizio.

È evidente che ci si discosta dalla scala naturale, e quindi dalle consonanze e dissonanze che esistono in natura (rappresentate da numeri razionali) e si accoglie col temperamento equabile un sistema strutturalmente razionale fondato su numeri irrazionali. L'età della ragione usa il numero irrazionale per affermare sé stessa; la chiesa fa sua la nuova musica temperata che è frutto del superamento del timore divino da parte dell'uomo razionale del Settecento. Filosofia, Matematica e Musica non sono mai state così unite come nella vicenda evolutiva del temperamento. Mai l'uomo si era avvicinato tanto all'idea di infinito: la teologia stava diventando una scienza.

È sicuramente interessante, per finire, porsi la domanda: perché fu scelto proprio il numero 12 per suddividere l'ottava in parti uguali. È ancora la matematica a correrci in aiuto: dividendo un segmento in parti uguali e riportando su di esso gli intervalli corrispondenti alle principali consonanze e dissonanze naturali, si nota che le scale dove i punti di suddivisione si avvicinano maggiormente a detti intervalli naturali sono quelle divise in 12, 19, 22, 24, ... parti uguali. La speculazione matematica si ferma di fronte alla pratica musicale: la scala ben temperata è appunto il più alto compromesso fra calcolo matematico e pratica musicale. Qualcuno sostiene che sia un compromesso divino, dove il razionale accoglie e fa suo l'irrazionale; altri dànno a quel compromesso un nome, anzi una formula:

$$\sqrt[12]{2}$$

radice dodicesima di due
ovvero l'idea di Dio
espressa in matematica sintesi musicale